

## บุพภาพของผลต่างสมมาตรระหว่างเซตภายใต้ฟังก์ชัน

ชิงชัย วัฒนธรรมเมธิ\*, อีรพล บัวทอง และ อีระพงศ์ คงเกื้อ

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา จังหวัดสงขลา 90000

\*chingchai.wa@skru.ac.th

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาบุพภาพของผลต่างสมมาตรระหว่างเซตภายใต้ฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยจะศึกษาภาพของผลต่างสมมาตรระหว่างเซต  $A$  และ  $B$  ซึ่งมีบทนิยามเป็น  $A * B = (A - B) \cup (B - A)$  และ  $f^{-1}(C) = \{x \in X \mid \exists y \in C, y = f(x)\}$  ในทั้ง 3 กรณีอันได้แก่ (1)  $A \cap B \neq \emptyset$  (2)  $A \cap B = \emptyset$  และ (3)  $A \subset B$

**คำสำคัญ:** ผลต่างสมมาตร, ผลต่างสมมาตรระหว่างเซต, บุพภาพของเซตภายใต้ฟังก์ชัน

### บทนำ

ให้  $U$  เป็นเอกภพสัมพัทธ์  $A, B \subset U$  ผลต่างสมมาตรระหว่างเซต  $A$  และ  $B$  นิยามโดย  $A * B = (A - B) \cup (B - A)$  ผลต่างสมมาตรเป็นการดำเนินการพื้นฐานบนเซตที่มีนักวิจัยหลายท่านนำไปศึกษา Alsina และ Trillas ได้ศึกษาเกี่ยวกับ ผลต่างสมมาตรของ fuzzy sets รวมถึง Shen และ Zhang ได้ศึกษาเกี่ยวกับการดำเนินการของผลต่างสมมาตรบน fuzzy sets

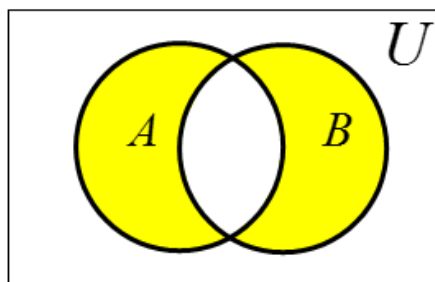
ในการศึกษางานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสนใจศึกษาบุพภาพของผลต่างสมมาตรระหว่างเซตภายใต้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ในทั้ง 3 กรณีอันได้แก่ (1)  $A \cap B \neq \emptyset$  (2)  $A \cap B = \emptyset$  และ (3)  $A \subset B$

### บุพภาพของผลต่างสมมาตร (Pre-image of Symmetric Difference)

ก่อนที่จะศึกษาบุพภาพของผลต่างสมมาตรระหว่างเซตภายใต้ฟังก์ชัน จะขอกล่าวถึงบทนิยามของผลต่างสมมาตร และบทนิยามของภาพของฟังก์ชันดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 1** กำหนด  $A$  และ  $B$  เป็นเซตใด ๆ ผลต่างสมมาตร (symmetric difference) ระหว่าง  $A$  และ  $B$  เขียนแทนด้วย  $A * B$  นิยามโดย  $A * B = (A - B) \cup (B - A)$

ผลต่างสมมาตรระหว่างเซต  $A$  และเซต  $B$  สามารถแสดงโดยแผนภาพเวนน - ออยเลอร์ ได้ดังนี้



รูปที่ 1 แสดงผลต่างสมมาตรระหว่างเซต  $A$  และเซต  $B$

**บทนิยาม 2** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A \subset Y$  ฟังก์ชันบุพภาพ (Pre-image function) ของ  $A$  ภายใต้  $f$  เขียนแทนด้วย  $f^{-1}(A)$  นิยามโดย  $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid \exists y \in A, y = f(x)\}$

**ทฤษฎีบท 1** ถ้า  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า

1. ถ้า  $A \subset B$  แล้ว  $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
2.  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
3.  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4.  $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

**ข้อสังเกต** ถ้า  $A$  และ  $B$  เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1.  $A * B = B * A$
2.  $A - B \subset A * B$
3.  $A * B = (A \cup B) - (A \cap B)$
4.  $(A \cap B) \cap (A * B) = \emptyset$
5.  $(A \cap B) \cup (A * B) = A \cup B$
6.  $A' * B' = A * B$
7.  $A * B \subset A \cup B$

**ทฤษฎีบท 2** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}(A * B) = f^{-1}(A) * f^{-1}(B)$

**พิสูจน์**  $f^{-1}(A * B) = (f^{-1}(A) - f^{-1}(B)) \cup (f^{-1}(B) - f^{-1}(A)) = f^{-1}(A) * f^{-1}(B)$

**ทฤษฎีบท 3** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  ถ้า  $A \subset B$  แล้ว  $f^{-1}(A * B) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$

**พิสูจน์** ให้  $A \subset B$  ดังนั้น  $A \cup B = B$  และ  $A \cap B = A$

$$f^{-1}(A * B) = f^{-1}((A \cup B) - (A \cap B)) = f^{-1}(B - A) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$$

**บทแทรก 4** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}((A - B) * (A * B)) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $A - B \subset A * B$  ดังนั้น  $f^{-1}((A - B) * (A * B)) = f^{-1}((A * B) - (A - B)) = f^{-1}(B - A) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$

**บทแทรก 5** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}((A - B) * A) = f^{-1}(A \cap B)$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $A - B \subset A$  ดังนั้น  $f^{-1}((A - B) * A) = f^{-1}(A - (A - B)) = f^{-1}(A \cap B)$

**บทแทรก 6** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}((A \cap B) * A) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $A \cap B \subset A$  ดังนั้น  $f^{-1}((A \cap B) * A) = f^{-1}(A - (A \cap B)) = f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

**บทแทรก 7** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}(A * (A \cup B)) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $A \subset A \cup B$  ดังนั้น  $f^{-1}(A * (A \cup B)) = f^{-1}((A \cup B) - A) = f^{-1}(B - A) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$

**บทแทรก 8** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  ถ้า  $A \subset B$  แล้ว  $f^{-1}(A' * B') = f^{-1}(A') - f^{-1}(B')$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $B' \subset A'$  จะได้  $f^{-1}(A' * B') = f^{-1}(A' - B') = f^{-1}(A') - f^{-1}(B')$

**ทฤษฎีบท 9** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  ถ้า  $A \cap B = \emptyset$  แล้ว  $f^{-1}(A * B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

**พิสูจน์** ให้  $A \cap B = \emptyset$  ดังนั้น

$$f^{-1}(A * B) = f^{-1}((A \cup B) - (A \cap B)) = f^{-1}(A \cup B - \emptyset) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

**บทแทรก 10** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}((A - B) * (B - A)) = f^{-1}(A) * f^{-1}(B)$

**พิสูจน์**  $f^{-1}((A - B) * (B - A)) = f^{-1}(A - B) \cup f^{-1}(B - A) = f^{-1}((A - B) \cup (B - A))$

$$= f^{-1}(A * B) = f^{-1}(A) * f^{-1}(B)$$

**บทแทรก 11** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}((A - B) * B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

**พิสูจน์**  $f^{-1}((A - B) * B) = f^{-1}(A - B) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}((A - B) \cup B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

**บทแทรก 12** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}((A - B) * (A \cap B)) = f^{-1}(A)$

**พิสูจน์**  $f^{-1}((A - B) * (A \cap B)) = f^{-1}(A - B) \cup f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}((A - B) \cup (A \cap B)) = f^{-1}(A)$

**บทแทรก 13** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}((A \cap B) * (A * B)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

**พิสูจน์**  $f^{-1}((A \cap B) * (A * B)) = f^{-1}(A \cap B) \cup f^{-1}(A * B) = f^{-1}((A \cap B) \cup (A * B)) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

**บทแทรก 14** กำหนดให้  $f: X \rightarrow Y; A \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}(A * A') = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A')$

**บทแทรก 15** กำหนดให้  $f: X \xrightarrow{1-1} Y; A \subset Y$  จะได้ว่า  $f^{-1}(A') = (f^{-1}(A))'$

**พิสูจน์**  $f^{-1}(A') = f^{-1}(Y - A) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(A) = X - f^{-1}(A) = (f^{-1}(A))'$

### สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยทำให้ได้ทฤษฎีที่น่าสนใจดังนี้ สำหรับ  $f: X \rightarrow Y; A, B \subset Y$  จะได้

1.  $f^{-1}(A * B) = f^{-1}(A) * f^{-1}(B)$
2. ถ้า  $A \subset B$  แล้ว  $f^{-1}(A * B) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$
3. ถ้า  $A \cap B = \emptyset$  แล้ว  $f^{-1}(A * B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

### บรรณานุกรม

Alsina, C. & Trillas, E. (2005). On the symmetric difference of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 153(2005), 181-194.

Shen, Z. & Zhang, D. (2015). Symmetric difference operators on fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 308(2017), 1-26.

เซเอ็ม สายทอง. (2530). ทฤษฎีเซต. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครู

นวรรตน์ อนันต์. (2529). ทฤษฎีเซต. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบ้านสมเด็จเจ้าพระยา.  
มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่.

วรเชษฐ สมมะณี. (2554). ทฤษฎีเซต. เชียงใหม่: สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
ศิลปการ.